Про Р-деформації поверхонь обертання

Федченко Ю.С.
(Одеська національна академія харчових технологій)
E-mail: fedchenko_julia@ukr.net

Раніше у роботах [1], [2] вивчалися нескінчено малі геодезичні деформації (Р-деформації) поверхонь в евклідовому просторі E^3. Для таких деформацій знайдено нову форму основних рівнянь, яку представлено через тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^α та функцію ψ похідної вектора зміщення $\overline{U}_i = c_{i\alpha}\left(\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} - \frac{3}{2}\psi c^{\alpha\beta} + c_1 c^{\alpha\beta}\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n}$, виписано ознаки афінних деформацій. У результаті дослідження основних рівнянь отримано наступні результати.

Теорема 1. *Для того, щоб нескінченно мала деформація поверхні S (ненульової повної кривини $K \neq 0$) класу C^3 була геодезичною, необхідно і достатньо, щоб на поверхні існували функції ψ, φ, які задовольняють наступні рівняння:*

$$\frac{K_i}{3K^2}\left(3\nabla_h\psi_m + \lambda g_{mh}\right) - \frac{1}{3K}\left(3\nabla_{hi}\psi_m + \lambda_i g_{mh}\right) = \psi_h g_{im} - \psi_i g_{hm} + \psi_m g_{hi},$$

$$-\frac{\psi_\alpha c^{\alpha\beta}}{K^2}(K_\gamma b^\gamma_\beta - 2K_\beta H) + \nabla_\beta(\varphi_\alpha d^{\alpha\beta}) + 2H\varphi = 0,$$

де $\lambda = -\frac{3}{2}\nabla_\beta\psi_\alpha g^{\alpha\beta}$, $\lambda_i = \partial_i\lambda$, $\nabla_{hi} = \nabla_i\nabla_h$.

Тоді тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^α, що представляють похідну вектора зміщення, мають вигляд

$$\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{K}\left(\frac{\varphi K}{2}g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\nabla_h\psi_k g^{h\beta}c^{k\alpha} - \frac{1}{4}\nabla_h\psi_k g^{h\alpha}c^{k\beta}\right), \tag{1}$$

$$T^\alpha = \frac{1}{2}\left(-\psi_h c^{hk}d^\alpha_k + \varphi_k d^{k\alpha}\right). \tag{2}$$

Тут $K_i = \partial_i K$, H - середня кривина поверхні, $d^{ij} = \frac{1}{K}c^{i\alpha}c^{j\beta}b_{\alpha\beta}$, $d^{i\alpha}b_{j\alpha} = \delta^i_j$.

Теорема 2. *Поверхні обертання $\overline{r} = (ucosv, usinv, f(u))(K \neq const)$ допускають нетривіальні Р-деформації при $\varphi = 0$. При цьому*

$$\overset{\circ}{T}{}^{11} = \overset{\circ}{T}{}^{22} = 0, \overset{\circ}{T}{}^{12} = \frac{Cu}{4\sqrt{1+f'^2}},$$

$$T^1 = 0, T^2 = -\frac{Cu}{2f'}, \psi = C\frac{u^2}{2} + C_2, C, C_2 - const.$$

Теорема 3. *Для того, щоб поверхня S класу C^3 сталої повної кривини ($K = const \neq 0$) допускала Р-деформацію, необхідно і достатньо, щоб існували функції ψ, φ, що задовольняють рівняння*

$$\nabla_{hi}\psi_m = -K(2\psi_i g_{mh} + \psi_h g_{im} + \psi_m g_{hi}),$$

$$\nabla_\beta(\varphi_\alpha d^{\alpha\beta}) + 2H\varphi = 0.$$

Тоді тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^s похідної вектора зміщення $\overline{U}_i$ мають вигляд (1), (2).

Серед поверхонь $K = const \neq 0$ вибрано сферу та розглянуто випадок $\varphi = 0$.

Література

[1] Ю. С. Федченко. Нескінченно малі геодезичні деформації поверхонь. *Праці міжнародного геометричного центру.*, T4, №1: 50–63, 2011.

[2] Ю. С. Федченко. О бесконечно малых P-деформациях поверхности. *Известия Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г.Белинского.*, T1, №26: 282–287, 2011.